Сначала обрисуем проблему (тут будет многобукаф, чтобы точно поняли, в чём проблема).
Было прорешано огромное количество задач на одномерное движение, где потенциал достаточно хороший, чтобы можно найти аналитическое решение. Однако есть задачи, где U(x) имеет достаточно противный вид.
А нам по-прежнему нужно решить ДУ

$$\hat{H}\Psi(x) = E\Psi(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x)}{\partial x^2} + U(x)\Psi(x) = E\Psi(x)$$

$$\frac{\partial^2\Psi(x)}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U(x))\Psi(x) = 0$$

Обозначим $\frac{2m}{\hbar^2}\big(E - U(x)\big)$ (будем считать, что E настолько велико, что это везде >0) как $k^2(x)$. Тогда ДУ перепишется как

$$\frac{\partial^2\Psi(x)}{\partial x^2} + k^2(x)\Psi(x) = 0, \text{где } k(x) = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\big(E - U(x)\big)}$$

И как такое решать? В общем случае никак, но квазиклассическое приближение позволяет записать приблизительное решение.

Смотрите. Пусть потенциал – кусочно-постоянный. Вот такой, например:

Тогда мы точно можем написать ВФ на каждом участке:

$$\Psi(x) = Ae^{-\frac{i\sqrt{2m(E-U_1)}}{h}x} + Be^{\frac{i\sqrt{2m(E-U_1)}}{h}x} \text{ на первом участке}$$

$$\Psi(x) = Ce^{-\frac{i\sqrt{2m(E-U_2)}}{h}x} + De^{\frac{i\sqrt{2m(E-U_2)}}{h}x} \text{ на первом участке}$$

$$\Psi(x) = Ee^{-\frac{i\sqrt{2m(E-U_3)}}{h}x} + Fe^{\frac{i\sqrt{2m(E-U_3)}}{h}x} \text{ на первом участке}$$

Давайте это сравним с теормехом. Что будет в классике?

А там будет $v(x) = \sqrt{\frac{2(E-U(x))}{m}}$ - скорость частицы в каждой точке.

(напомним, что это следует из $\frac{mv^2(x)}{2} + U(x) = E$)

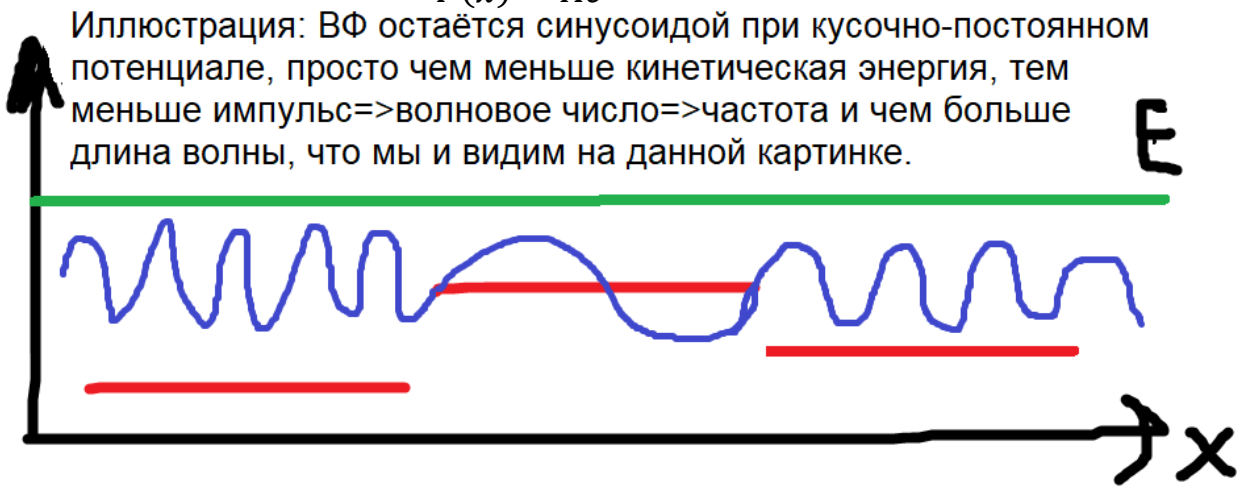
Тем меньше $E - U(x)$ (т.е. кинетическая энергия в данной точке), чем меньше скорость:

Сравним с тем, что получается в квантах при кусочно-постоянном потенциале:

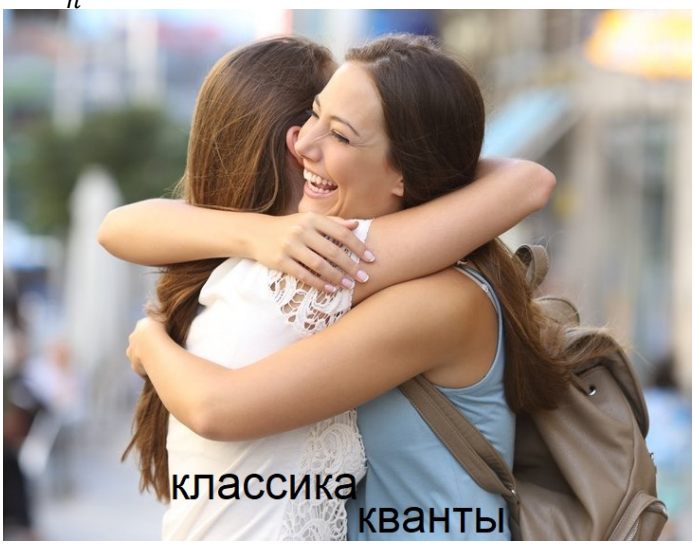
$$\Psi(x) = Ae^{-\frac{i\sqrt{2m(E-U_1)}}{h}x} + Be^{\frac{i\sqrt{2m(E-U_1)}}{h}x}$$

У нас два слагаемых только из-за того, что частиц может лететь в обе стороны. Для простоты оставим только в одну сторону:

$$\Psi(x) = Ae^{-\frac{i\sqrt{2m(E-U_1)}}{h}x}$$



Сходство с $v(x) = \sqrt{\frac{2(E-U(x))}{m}}$ видно. Оно станет ещё больше, если мы вместо $v(x)$ рассмотрим $p(x) = \sqrt{2m(E-U(x))}$. А если вспомним $p = kh$ и то, что $\frac{\sqrt{2m(E-U_1)}}{h}$ на самом деле k – ну просто одно и то же ☺



Идея квазиклассического приближения заключается в том, что раз кванты совпали с классикой для кусочно-постоянного потенциала, то пусть они совпадут для любого!
Т.е. мы определим

$$k(x) = \frac{\sqrt{2m(E - U(x))}}{h}$$

и пишем

$$\Psi(x) = Ae^{-i\int k(x)dx} + Be^{i\int k(x)dx}$$

На самом деле, как мы убедимся в 6-м семестре,

$$\Psi(x) = \frac{A}{\sqrt{k(x)}}e^{-i\int k(x)dx} + \frac{B}{\sqrt{k(x)}}e^{i\int k(x)dx}$$

Сходство почти полное, только отличие в нормировочном множителе $\frac{1}{\sqrt{k(x)}}$.
Увы, он уже имеет квантовую природу и не имеет простого объяснения. Но зато мы поняли, почему это приближение называется квазиклассическим.

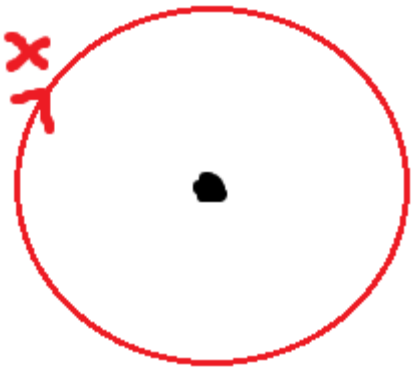
Пример. Ещё до аппарата Шрёдингера, с помощью которых атом водорода удалось просчитать ТОЧНО, через полиномы Лаггера, Бор подсчитал энергетические уровни в атоме водорода, и что важно – чудом у него получилось правильно. Они сошлись с экспериментом и Бор стал уважаемым челом.
Почему чудом? Потому что Бор, как мы сейчас увидим, отталкивался от классических представлений. Он использовал то, что позже назовут квазиклассическим приближением – на орбите должно укладываться целое число длин полуволн, или, что то же самое, момент импульса должен быть кратен ħ. Вот что пишет Рубцов:

> Рассуждения Бора основывались на следующей логике. Бор считает, что при испускании фотона с частотой ω энергия обращающегося вокруг ядра электрона меняется скачком - на величину $\hbar\omega$. Чему же должна быть равна частота испущенного фотона? Бор предполагает, что она должна быть простым образом связана с классической частотой Ω обращения электрона по орбите, на которой он оказался в результате перехода. Именно, Бор предполагает связь $\omega = \Omega/2$. Для простоты, Бор рассматривает только круговые орбиты. Эти условия накладывают достаточно жесткие ограничения на то, с каким именно периодом электрон может обращаться вокруг ядра – выкладки показывают, что разрешенными оказываются орбиты, угловой момент которых равен целому числу постоянных Планка, $m\omega R^2 = n\hbar$. Теория Бора замечательно воспроизводила закономерности спектра атомов водорода. Наглядное представление о выделенных орбитах (их называют орбиталями), по которым движется электрон, сохранилось до настоящего времени, хотя с точки зрения современной теории оно и является чрезмерно упрощенным.

Перескажу более простым языком. По квазиклассическому приближению

$$\Psi(x) = Ae^{-i\int k(x)dx}$$

Изогнём ось x:



Тогда у нас будет условие периодичности: $\Psi(x) = \Psi(x + 2\pi)$
Из него $\int k(x)dx = 2\pi n$. (Вот это условие $\int k(x)dx = 2\pi n$ ещё иногда называют условием Бора-Зоммерфельда).

$$k * 2\pi r = 2\pi n$$
$$kr = n$$
$$\frac{pr}{h} = n$$
$$\frac{L}{h} = n$$

(L – момент импульса)

$$L = nh$$

Вот и получили, что момент импульса должен быть равен целому числу приведённых Планка.
На этом моменте велик соблазн углядеть в этом нечто фундаментальное и попытаться дать физический смысл h. Напоминаю, что квазиклассическое ПРИБЛИЖЕНИЕ – это приближение. Бору повезло, что он получил с помощью квазиклассического ПРИБЛИЖЕНИЯ результат, который ***чудом***

случайно совпал с экспериментом, и он такой «о, моя теория верна, продолжаем работу!». Кто знает, получил бы он иное – он бы сказал «да ну нафиг, ~~вало в айти~~, иду на завод» - насколько бы задержалось развитие квантовой физики? ☺

Гипотеза де Бройля и эксперимент Дэвиссона-Джермера.
После этого Де Бройль вообразил, что не один фотон такой исключительный с корпускулярно-волновым дуализмом, что все частицы на свете волны. Это, в частности, очень удачно вписалось в боровскую концепцию атома: если на орбите укладывается целое число длин полуволн, то всё ОК.

Опыт Дэвиссона – Джермера (https://ru.wikipedia.org/wiki/Опыт_Дэвиссона_—_Джермера) – опыт , доказавший волновую природу электронов.

Чё делали? Разогнанные электроны впечатывались в никелевую пластинку, после чего отражались. Похоже на опыт Резерфорда, только он обстреливал альфа-частицами, а два наших Д – электронами.
Двигая подвижный детектор, они построили зависимость отражённых электронов от угла. Картина получались интересная, с максимумами и минимумами.
А как это объяснить? А так: произошла дифракция электронов на кристаллической решётке. А дифракция присуща только волне. Следовательно, электроны тоже в некотором роде волна.